Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

SISTEMAS INTEGRÁVEIS E O TEOREMA DE LIOUVILLE

Seminário final da disciplina MAT2907 – EDP I – Prof. Ricardo Sá Earp

Jorge Silva Garcia

Dezembro de 2003

1 CONCEITOS PRELIMINARES

No que se segue, considera-se $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, U aberto e um ponto $x \in U$ será denotado por $x = (q,p) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$.

Definição 1.1. *Um* hamiltoniano *em* U *é uma função* $H : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciável*

Considerações físicas conduzem a uma escolha particular da função H em U e é esta função escolhida que recebe o nome de *hamiltoniano*. Em geral, é requerido que H seja, pelo menos, de classe $\mathcal{C}^2$.

Definição 1.2. *Dado um hamiltoniano* $H :\longrightarrow \mathbb{R}$*, o* campo vetorial hamiltoniano *associado* $X_H : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *é definido como:*

$$X_H(q,p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q_n}\right). \tag{1.1}$$

Ao *campo vetorial hamiltoniano* associa-se um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem, o *sistema hamiltoniano* $(\dot{q}, \dot{p}) = X_H(q,p)$

$$\begin{cases} q'(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ p'(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \ . \end{cases} \tag{1.2}$$

O sistema acima já exibe uma estrutura especial típica dos *sistemas hamiltonianos*, entretanto pouco revela sobre sua decorrência na *Física* e quais características adicionais importantes possuem em função dessa estrutura.

Exemplo 1A. *Suponha* $n = 1$, $q = (q_1, q_2)$ *e* $p = (p_1, p_2)$ *com* m *e* k *constantes positivas. Seja* H *o* hamiltoniano *definido por*

$$\begin{aligned} &H : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad U = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^2\right) \\ &H(q,p) = \frac{|p|^2}{2m} - \frac{k}{|q|} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} - \frac{k}{(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}} \ . \end{aligned} \tag{1.3}$$

O campo hamiltoniano *associado é dado por:*

$$X_H(q,p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right); \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -\dfrac{kq}{|q|^3} \ . \end{cases} \tag{1.4}$$

E o sistema hamiltoniano*:*

$$\begin{cases} q'(t) = & \dfrac{p}{m} \\ p'(t) = & -\dfrac{kq}{|q|^3}\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

Eliminando $p(t)$ *e* $p'(t)$ *de (1.5), obtemos*

$$m\ddot{q} = -\frac{kq}{|q|^3}\,.$$

Que é a 2ª Lei de Newton *para o movimento de uma partícula sujeita a uma força central dirigida à origem do referencial e de intensidade proporcional ao inverso do quadrado da distância.*

Definição 1.3. (Estrutura Simplética do $\mathbb{R}^{2n}$). *É a matriz* $J \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ *definida por:*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},\ \textit{onde } I \in \mathbb{R}^{n\times n} \textit{denota a matriz identidade.}$$

Verifica-se que a matriz J possui a seguinte propriedade:

$$J^2 = -I,\ J^{-1} = J^T = -J.$$

Escrevendo $\nabla H := \left(\dfrac{\partial H}{\partial q}, \dfrac{\partial H}{\partial p}\right)$, temos a seguinte expressão para o *campo hamiltoniano*:

$$X_H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} = J\nabla H. \tag{1.6}$$

Definição 1.4. *Denomina-se* matriz simplética *à qualquer matriz real* S $2n \times 2n$ *tal que*

$$S^T J S = J, \tag{1.7}$$

onde J *é a* estrutura simplética *de* $\mathbb{R}^{2n}$.

A coleção das *matrizes simpléticas* munida de multiplicação matricial forma um grupo, denotado por $Sp(n)$. A forma bilinear $\Omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Omega(v,w) = \langle v, Jw\rangle$ é denominada *forma canônica simplética* e o $\mathbb{R}^{2n}$ munido com esta forma recebe o nome de *espaço vetorial simplético*. Verifica-se que esta forma é *anti-simétrica*, pois $\langle v, Jw\rangle = v^T J w = (v^T J w)^T = w^T J^T v = -w^T J v = -\langle w, Jv\rangle = -\langle Jv, w\rangle$, daí $\Omega(v,v) = \langle v, Jv\rangle = 0$. Em linguagem de *formas diferenciais*, recordando que uma *2-forma diferencial* de classe $\mathcal{C}^k$ é uma aplicação

$$\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$$
$$\omega(x) = \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}(x)\, dx_i \wedge dx_j$$

onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$, $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das *aplicações bilineares alternadas* e $a_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i < j \leq n$ são funções de classe $\mathcal{C}^k$. Uma base para $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\{dx_i \wedge dx_j\}_{1 \leq i < j \leq n}$, onde $dx_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ é o funcional linear que leva um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ na sua i-ésima coordenada, i.e., $dx_i(v) = v_i$. O *produto exterior* entre dx_i e dx_j, denotado por $dx_i \wedge dx_j$ é uma operação anti-simétrica, i.e., $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, donde decorre imediatamente que $dx_i \wedge dx_i = 0$. Cada elemento $dx_i \wedge dx_j$, $1 \leq i < j \leq n$, da base do espaço $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaz à regra:

$$v = (v_1, \ldots, v_n), \quad w = (w_1, \ldots, w_n)$$

$$dx_i \wedge dx_j(v, w) := \begin{vmatrix} dx_i(v) & dx_i(w) \\ dx_j(v) & dx_j(w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_i & w_i \\ v_j & w_j \end{vmatrix} = v_i w_j - w_i v_j \,.$$

Portanto, sendo Ω um elemento de $\Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})$, na notação $(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, pode ser escrito como combinação linear de elementos da base $\{dq_i \wedge dq_j, dq_i \wedge dp_i, dq_i \wedge dp_j, dp_i \wedge dq_j, dp_i \wedge dp_j\}_{1 \leq i < j \leq n}$, que resulta em:

$$\begin{aligned}
& v = (v_1, \ldots, v_{2n}); \quad w = (w_1, \ldots, w_{2n}); \\
\langle v, Jw \rangle &= \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{2n} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (v_j w_{n+j} - v_{n+j} w_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(\begin{vmatrix} v_j & w_j \\ v_{n+j} & w_{n+j} \end{vmatrix} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dx_{n+j}(v, w) = \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j(v, w)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Teorema 1.5. (Conservação de Energia). *Se* $t \mapsto (q(t), p(t))$ *para* t *em algum intervalo* I *for uma* curva integral *de* (1.2), *então existe uma constante* E *tal que* $H(q(t), p(t)) = E$, *i.e, o* hamiltoniano *é uma* integral primeira.

Prova. Tomando a derivada do hamiltoniano H em relação ao tempo, tem-se

$$\frac{dH}{dt}(q(t), p(t)) = \langle \nabla H, (q'(t), p'(t)) \rangle = \langle \nabla H, J \nabla H \rangle = \Omega \left(\nabla H, \nabla H \right) = 0,$$

por (1.2), (1.6) e pela anti-simetria da forma simplética. □

Cada *curva integral* de um sistema hamiltoniano pertence a uma *superfície de nível* do hamiltoniano, i.e., o traço do caminho $t \mapsto (q(t), p(t))$ está contido no conjunto

$$S_H^E = \{(q, p) \in U \,|\, H(q, p) = E\}, \tag{1.9}$$

denominado *superfície de energia*, que tem dimensão $(2n-1)$, visto como subvariedade do $\mathbb{R}^{2n}$. Uma importante propriedade de subvariedades diz que a interseção de k subvariedades de dimensão $2n-1$ (com vetores normais L.I. Isto faz sentido, pois a codimensão é igual a 1) do $\mathbb{R}^{2n}$ resulta em uma subvariedade de dimensão $2n-k$. Como o sistema hamiltoniano tem dimensão $2n$, são necessárias $2n-1$ integrais primeiras, também chamadas de *constantes do movimento*, para determinação completa de uma curva integral, que é a dada pela interseção das $2n-1$ *superfícies de nível* correspondentes. O caso $n=1$ fica completamente determinado pelo hamiltoniano, que é uma *constante do movimento*, por causa da lei de conservação $H(q(t),p(t))=E$. Para o caso $n>1$, é necessário buscar outras constantes do movimento, além do hamiltoniano.

Definição 1.6. *O* Colchete de Poisson *de duas funções* $F,G : U \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é definido por*

$$\{F,G\} := \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j}-\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right) = \langle \nabla F, J\nabla G\rangle = \Omega\left(\nabla F, \nabla G\right) \tag{1.10}$$

onde $\Omega(\cdot\,,\,\cdot)$ *é a* forma canônica simplética *do* $\mathbb{R}^{2n}$

Teorema 1.7. *Seja* $H : U \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *um hamiltoniano e* $(q(t),p(t))$, $t \in I$ *uma* curva integral *do sistema hamiltoniano associado. Então, para qualquer função diferenciável* $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *tem-se*

$$\frac{dF}{dt}\left(q(t),p(t)\right) = \{F,H\}\left(q(t),p(t)\right) \tag{1.11}$$

Prova.

$$\frac{dF}{dt}\left(q(t),p(t)\right) = \langle \nabla F, (q'(t),p'(t))\rangle = \langle \nabla F, J\nabla H\rangle = \{F,H\}\left(q(t),p(t)\right)$$

□

Corolário 1.8. $F : U \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma* constante do movimento (integral primeira) *do sistema hamiltoniano* (1.2) *se, e só se,* $\{F,H\}=0$

De um modo geral, dizemos que duas *constantes do movimento* quaisquer F e G do *sistema hamiltoniano* (1.2) estão em *involução* quando $\{F,G\}=0$. Então o corolário (1.8.) nos diz que toda constante do movimento está em involução com o hamiltoniano H.

2 SISTEMAS COMPLETAMENTE INTEGRÁVEIS

Dada uma função hamiltoniana $H : U \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$, já sabemos que esta é uma *integral primeira* ou *constante do movimento* para o sistema hamiltoniano associado dado por (1.2), cujo o traço da *curva integral* está contido na *superfície de nível* $S_H^E = \{(q,p) \in U \,|\, H(q,p)=E\}$. Isto quer dizer que o vetor gradiente ∇H é ortogonal ao *campo hamiltoniano*, pois

$$\langle \nabla H, X_H\rangle = \langle \nabla H, J\nabla H\rangle = \{H,H\} = 0 \tag{2.1}$$

ouseja, X_H é *tangente* à superfície de nível S_H^E (em linguagem de variedades, X_H é, de fato, um campo vetorial tangente à subvariedade S_H^E). Sabemos que ainda sobram $2n-2$ integrais primeiras F_j, $j = 1, \ldots, 2n-2$ a serem encontradas para se determinar completamente uma curva integral. A cada F_j, podemos associar um campo vetorial hamiltoniano X_{F_j} e a respectiva superfície de nível $S_{F_j}^{c_j} = \{(q,p) \in U \,|\, F_j(q,p) = c_j\}$, de onde se observa que o campo vetorial hamiltoniano X_{F_j} é tangente a superfície de nível $S_{F_j}^{c_j}$, pois

$$\langle \nabla F_j, X_{F_j} \rangle = \langle \nabla F_j, J\nabla F_j \rangle = \{F_j, F_j\} = 0 \tag{2.2}$$

Cabe ressaltar que o hamiltoniano H é uma integral primeira muito especial, pois está em involução com qualquer integral primeira F_j do sistema hamiltoniano associado $(\dot{q}, \dot{p}) = X_H(q,p)$. A proposição a seguir relaciona a involução com a propriedade de tangência à superfície de nível.

Proposição 2.1. *Sejam* $\{F_j\}_{j=1}^k$ *uma coleção de integrais primeiras do sistema* (1.2), $\left\{X_{F_j}\right\}_j$ *os respectivos campos hamiltonianos associados e* $\left\{S_{F_j}^{c_j}\right\}_j$ *as respectivas superfícies integrais. Então* X_{F_i} *é tangente a* $S_{F_j}^{c_j}$ *se, e só se,* F_i *e* F_j *estão em* involução, *i.e.,* $\{F_i, F_j\} = 0$.

Prova.

$$\langle \nabla F_j, X_{F_i} \rangle = 0 \iff \langle \nabla F_j, J\nabla F_i \rangle = 0 \iff \{F_j, F_i\} = 0$$

□

Corolário 2.2. *Sejam* F_j, $j = 1, \ldots, k$ integrais primeiras *do sistema hamiltoniano* $(\dot{q}, \dot{p}) = X_H(q,p)$ *e suponha que em um aberto* $\tilde{U} \subset U$ *satisfaçam às seguintes condições:*

1. $\langle \nabla F_i, \nabla F_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$ (gradientes L.I.), *com* $\nabla F_i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$.
2. $\{F_i, F_j\} = 0$, $\forall i, j = 1, \ldots, k$ (em involução).

Então a interseção das superfícies de nível $S_{F_1}^{c_1} \cap \ldots \cap S_{F_k}^{c_k}$ *é uma subvariedade de dimensão* $2n-k$ *no* $\mathbb{R}^{2n}$*, que contém todas as curvas integrais do sistema e os campos vetoriais* $X_{F_1}, \ldots, X_{F_k}$ *são L.I. e tangentes à* $S_{F_1}^{c_1} \cap \ldots \cap S_{F_k}^{c_k}$.

Prova. Já foi visto que a condição de tangência de X_{F_i} para com $S_{F_j}^{c_j}$ é dada por $\langle \nabla F_j, X_{F_i} \rangle = 0$, que é equivalente a $\{F_j, F_i\} = 0$. Como as k integrais primeiras estão em involução entre si, então cada campo vetorial X_{F_j} é tangente à interseção das k superfícies de nível. Temos que

$$\langle X_{F_i}, X_{F_j} \rangle = \langle J\nabla F_i, J\nabla F_j \rangle = \langle \nabla F_i, J^T J \nabla F_j \rangle = \langle \nabla F_i, \nabla F_j \rangle = 0.$$

Portanto $X_{F_1}, \ldots, X_{F_k}$ são L.I. □

Uma pergunta natural que surge é qual seria o número máximo de integrais primeiras em involução entre si?

Proposição 2.3. *Se* F_j, $j = 1, \dots, k$, *são* integrais primeiras *do sistema hamiltoniano* $(\dot{q}, \dot{p}) = X_H(q, p)$, *nas mesmas condições do corolário* (2.2.) (*i.e., em involução e com gradientes L.I.*), *então* $k \leq n$.

Prova. Pela propriedade de subvariedades, já sabemos que $S_{F_1}^{c_1} \cap \dots \cap S_{F_k}^{c_k}$ é uma subvariedade de dimensão $2n - k$ no $\mathbb{R}^{2n}$, portanto seu espaço tangente também tem dimensão $2n - k$. Pelo corolário (2.2.), como $X_{F_1}, \dots, X_{F_k}$ são L.I. e tangentes a $S_{F_1}^{c_1} \cap \dots \cap S_{F_k}^{c_k}$, então para cada espaço tangente de dimensão $2n - k$ fixado, há k vetores L.I., portanto $k \leq 2n - k \Longrightarrow 2k \leq 2n \Longrightarrow k \leq n$ □

Proposição 2.4. *Se* F_j, $j = 1, \dots, n$, *são* integrais primeiras *do sistema hamiltoniano* $(\dot{q}, \dot{p}) = X_H(q, p)$, *nas mesmas condições do corolário* (2.2.) (*i.e., gradientes L.I. e em involução*), *então* $\{X_{F_i}\}_{i=1}^{n}$ *é uma base para o espaço tangente de* $S_F^c := S_{F_1}^{c_1} \cap \dots \cap S_{F_n}^{c_n}$ *e, além disso,* $\nabla F_j \perp S_F^c$, $\forall j = 1, \dots, n$.

Prova. Do corolário (2.2.), já sabemos que $X_{F_1}, \dots, X_{F_n}$ são L.I. e pertencem ao espaço tangente de S_F^c, que tem dimensão n, portanto $X_{F_1}, \dots, X_{F_n}$ geram este espaço tangente. Pela proposição (2.1.), a condição de involução $\{F_i, F_j\} = 0$ implica em $\nabla F_i \perp X_{F_j}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, logo ∇F_i é ortogonal ao subespaço gerado por $X_{F_1}, \dots, X_{F_n}$, que é justamente o espaço tangente a S_F^c, daí $\nabla F_j \perp S_F^c$, $\forall j = 1, \dots, n$.

□

A proposição acima nos diz que há, no máximo, n integrais primeiras em involução, fato este que conduz à seguinte definição:

Definição 2.5. *Seja* $H : U \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *um hamiltoniano tal que* $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ *são as integrais primeiras em involução entre si, i.e.,* $\{F_i, F_j\} = 0$, $\forall i, j = 1, \dots, n$ *para o sistema hamiltoniano* $(\dot{q}, \dot{p}) = X_H(q, p)$. *Então este sistema hamiltoniano é dito* Completamente Integrável *ou, resumidamente,* Integrável (no sentido de Liouville).

Verifica-se imdediatamente que para $n = 1$, todo sistema hamiltoniano é completamente integrável.

3 O TEOREMA DE LIOUVILLE

Definição 3.1. *sejam* $U, V \subset \mathbb{R}^{2n}$ *abertos. Um* difeomorfismo $f : U \longrightarrow V$ *é dito uma* transfomação canônica (*ou simplética*) *quando a matriz de* $f'(x)$ *for simplética,* $\forall x \in U$, *i.e.,*

$$f'(x)^T J f'(x) = J, \quad \forall x \in U.$$

Definição 3.2. *Seja* $X : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *um* campo vetorial *e* $f : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ *um difeomorfismo. O* push-forward *de* X *por* f *é o campo vetorial* $f_*(X) : V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *definido por* $f_*(X)(y) = f'(f^{-1}(y))X(f^{-1}(y))$

Definição 3.3. *Um difeomorfismo* $f : U \longrightarrow V$ *é dito* preservar a estrutura simplética *quando*

$$\Omega\left(f_*(X)(f(x))\,,\, f_*(Y)(f(x))\right) = \Omega\left(X(x)\,,\, Y(x)\right), \quad \forall x \in U \tag{3.1}$$

para quaisquer dois campos vetoriais $X, Y : U \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$

É interessante caracterizar os difeomorfismos que preservam a estrutura simplética em termos de 2-formas diferenciais. Considere, por exemplo, que $U, V \subset \mathbb{R}^2$ e o referido difeomorfismo leva $(q, p) \in U$ em $(\tilde{q}, \tilde{p}) \in V$. A forma canônica simplética nas coordenadas (q, p) é dada por $\Omega = dq \wedge dp$, e nas coordenadas $(\tilde{q}, \tilde{p})$ é dada por $\tilde{\Omega} = d\tilde{q} \wedge d\tilde{p}$. A expressão da matriz da derivada de f será:

$$f' = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{bmatrix}.$$

Expressando as 1-formas diferenciais $d\tilde{q}$ e $d\tilde{p}$ na base $\{dq\,,\,dp\}$, observando que tratam-se das diferenciais totais das funções $\tilde{q}(q, p)$ e $\tilde{p}(q, p)$ e desenvolvendo-se o produto exterior, temos:

$$d\tilde{q} \wedge d\tilde{p} = \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} dq + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} dp\right) \wedge \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} dq + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} dp\right) = \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right) dq \wedge dp. \tag{3.2}$$

A intenção agora é mostrar que

$$d\tilde{q} \wedge \tilde{p}(v, w) = dq \wedge dp\left(f'.v\,,\, f'.w\right), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2. \tag{3.3}$$

Para tanto, vamos desenvolver o segundo membro da expressão acima e comparar com (3.2):

$$dq \wedge dp\left(f'.v\,,\, f'.w\right) = dq \wedge dp\left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= dq \wedge dp\left(\left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}v_1 + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}v_2, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}v_1 + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}v_2\right), \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}w_1 + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}w_2, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}w_1 + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}w_2\right)\right) =$$

$$= \overbrace{dq \wedge dp\left(\left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}v_1, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}v_1\right), \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}w_1, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}w_1\right)\right)}^{=0} + dq \wedge dp\left(\left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}v_1, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}v_1\right), \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}w_2, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}w_2\right)\right) +$$

$$+ dq \wedge dp\left(\left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}v_2, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}v_2\right), \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}w_1, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}w_1\right)\right) + \overbrace{dq \wedge dp\left(\left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}v_2, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}v_2\right), \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}w_2, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}w_2\right)\right)}^{=0} =$$

$$= v_1 w_2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{vmatrix} - w_1 v_2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right) dq \wedge dp(v, w),$$

que comparando com (3.2) resulta na expressão em (3.3). Este resultado pode ser estendido para $\mathbb{R}^{2n}$, i.e.,

$$\Omega(v,w) := \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j(v,w) = \tilde{\Omega}(f'.v, f'.w) := \sum_{j=1}^{n} d\tilde{q}_j \wedge d\tilde{p}_j(f'.v, f'.w) \tag{3.4}$$

Uma importante relação entre *transformações canônicas* e a preservação da *estrutura simplética* é dada pela proposição a seguir.

Proposição 3.4. *Um difeomorfismo* $f : U \longrightarrow V$ *é uma* transformação canônica *se, e só se, preserva a* estrutura simplética

Prova. Suponha f canônica, então:

$$\Omega\left(f_*(X)(f(x))\,,\, f_*(Y)(f(x))\right) = \langle\, f_*(X)(f(x))\,,\, J\, f_*(Y)(f(x))\,\rangle = \langle\, f'(x)X(x)\,,\, J\, f'(x)Y(x)\,\rangle =$$

$$= X(x)^T \underbrace{f'(x)^T J\, f'(x)}_{=J\ ,\ \text{f é canônica}} Y(x) = X(x)^T J\, Y(x) = \langle X(x), J\, Y(x)\rangle = \Omega\left(X(x),\, Y(x)\right).$$

Reciprocamente, se f preserva a estrutura simplética, temos:

$$\Omega\left(f_*(X)(f(x))\,,\, f_*(Y)(f(x))\right) = \Omega\left(X(x),\, Y(x)\right) \Rightarrow \langle\, f_*(X)(f(x))\,,\, J\, f_*(Y)(f(x))\,\rangle =$$

$$= \langle X(x), J\, Y(x)\rangle \Rightarrow X(x)^T f'(x)^T J\, f'(x) Y(x) = X(x)^T J\, Y(x).$$

Como a igualdade $X(x)^T f'(x)^T J\, f'(x)Y(x) = X(x)^T J\, Y(x)$ ocorre para quaisquer vetores $X(x),\ Y(x) \in \mathbb{R}^{2n}$, decorre então que $f'(x)^T J\, f'(x) = J$, portanto f é canônica □

Em vista da expressão em (3.3), obtemos o seguinte corolário:

Corolário 3.5. *Um difeomorfismo* $f : U \longrightarrow V$*, que leva* $(q,p) \in U \subset \mathbb{R}^{2n}$ *em* $(\tilde{q},\tilde{p}) \in V \subset \mathbb{R}^{2n}$ *é uma tranformação canônica e, e só se,* $\sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j = \sum_{j=1}^{n} d\tilde{q}_j \wedge d\tilde{p}_j$

Prova. De (3.4) e da proposição anterior, temos para quaisquer $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$\sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j(v,w) = \Omega(v,w) = \tilde{\Omega}(f'.v, f'.w) \overbrace{=}^{\text{f canônica}} \tilde{\Omega}(v,w) = \sum_{j=1}^{n} d\tilde{q}_j \wedge d\tilde{p}_j(v,w)$$

□

Proposição 3.6. *Seja* $f : U \longrightarrow V$ *uma* transformação canônica *entre abertos* $U, V \subset \mathbb{R}^{2n}$. *Então o* push-forward *de qualquer campo hamiltoniano por* f*, também será um campo hamiltoniano, mais especificamente,* $f_*(X_H) = X_{H\circ f^{-1}}$*, para qualquer função diferenciável* $H : U \longrightarrow \mathbb{R}$*. Mais do que isso,* f *preserva o* colchete de Poisson, *i.e.*

$$\{F \circ f^{-1}, H \circ f^{-1}\} = \{F, H\} \circ f^{-1}$$

para quais quer funções diferenciáveis $F, H : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Prova. Usando a notação $(H')^T = \nabla H$, temos

1. $$\begin{aligned} f_*(X_H) &= (f' \circ f^{-1})(X_H \circ f^{-1}) = (f' \circ f^{-1})(J\nabla H \circ f^{-1}) = \\ &= (f' \circ f^{-1})(J(H')^T \circ f^{-1}) = \underbrace{(f' \circ f^{-1})J(f' \circ f^{-1})^T}_{\text{simplética}}(f' \circ f^{-1})^{-T}(H' \circ f^{-1})^T = \\ &= J(f' \circ f^{-1})^{-T}(H' \circ f^{-1})^T = J(\underbrace{(H' \circ f^{-1})(f' \circ f^{-1})^{-1}}_{\text{Regra da Cadeia}})^T = \\ &= J((H \circ f^{-1})')^T = J\nabla(H \circ f^{-1}) = X_{H \circ f^{-1}} \end{aligned}$$

2. Seja $g = f^{-1}$, como f é *simplética*, $f'Jf'^T = J$. Então temos:

$$g'Jg'^T = J = (f^{-1})'J((f^{-1})')^T = (f'J^{-T}(f')^T)^{-T} = (f'J(f')^T)^{-T} = J^{-T} = J$$

$$\implies g \text{ é simplética}$$

$$\begin{aligned} \{F \circ g, H \circ g\} &= \langle \nabla(F \circ g), J\nabla(H \circ g)\rangle = \langle((F \circ g)')^T, J((H \circ g)')^T\rangle = \\ &= \langle((F' \circ g)g')^T, J((H' \circ g)g')^T\rangle = (F' \circ g)\underbrace{g'J(g')^T}_{\text{simplética}}(H' \circ g)^T = \\ &= (F' \circ g)J(H' \circ g)^T = \langle(F' \circ g)^T, J(H' \circ g)^T\rangle = \\ &= \langle\nabla(F' \circ g), J\nabla(H' \circ q)\rangle = \{F, H\} \circ g \end{aligned}$$

□

Dado o sistema hamiltoniano $(\dot{q}, \dot{p}) = X_H(q, p)$, apesar de ser uma decorrência do teorema do *fluxo tubular* a existência local de $2n - 1$ integrais primeiras independentes, não existe, a priori, nenhuma receita ou fórmula para se explicitar estas integrais. O *Teorema de Liouville* fornece um critério de construtibilidade das integrais primeiras, relacionado com o conceito de *quadratura*.

Definição 3.7. *Uma aplicação é dita* construída por quadraturas *caso seja produzida pela composição das seguintes operações sobre uma dada coleção de funções:*

- *manipulações algébricas elementares*
- *diferenciação*
- *integração*
- *construção de aplicações inversas*

Teorema 3.8. (Liouville) *A solução de um* sistema hamiltoniano integrável (no sentido de Liouville) *pode ser obtida por quadraturas.*

Prova. Defina a 1-forma diferencial $\alpha = \alpha_{(q,p)} := \sum_{i=1}^{n} q_i dp_i$. Fazendo a derivada exterior, obtemos $d\alpha = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i = \Omega$ por (1.8), que é justamente a forma canônica simplética do $\mathbb{R}^{2n}$. Considerando o sistema hamiltoniano $(\dot{q}, \dot{p}) = X_H(q,p)$ com n integrais primeiras $F_1, \ldots, F_n$ em involução, vamos construir uma tranformação canônica h, que leva as coordenadas (q_i, p_i) em novas coordenadas (F_i, Ψ_i) de modo que as integrais primeiras F_i, $i = 1, \ldots, n$ estão entre as novas coordenadas. Pelo corolário (3.5.), a aplicação será canônica se preservar a forma canônica simplética nas novas coordenadas:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i = \sum_{i=1}^{n} dF_i \wedge d\Psi_i$$

Se $(q(t), p(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ for uma curva integral do sistema (1.1), então pelo teorema (1.7.) as funções F_j e Ψ_j satisfazem a:

$$\begin{cases} \dfrac{dF_j}{dt}(q(t),p(t)) = \{H, F_j\}(q(t),p(t)) = 0, \text{ porque é integral primeira} \\ \dfrac{d\Psi_j}{dt}(q(t),p(t)) = \{H, \Psi_j\}(q(t),p(t)) = \dfrac{\partial H}{\partial F_j} = \beta_j\,. \end{cases}$$

Note que o β_j acima é igual a 0 ou 1, porque H é uma das integrais primeiras $F_1, \ldots, F_n$, portanto aparece como uma das novas coordenadas, daí $\dfrac{\partial H}{\partial F_j} = 0$, se $F_j \neq H$ e $\dfrac{\partial H}{\partial F_j} = 1$ se $F_j = H$. Assim, de um modo geral, β_j é uma constante, portanto não depende de t, o que permite escrever:

$$F_j(q(t),p(t)) = F_j(q(0),p(0)), \quad \Psi_j(q(t),p(t)) = \Psi_j(q(0),p(0)) + t\beta_j$$

Seja $S_{F_i}^{c_i}$ a superfície de nível para $F_i(q,p) = c_i$. Seja $S_F^c := S_{F_1}^{c_1} \cap \ldots \cap S_{F_n}^{c_n}$, onde $c := (c_1, \ldots, c_n)$. Pela proposição (2.4.), sabemos que $\nabla F_i \perp S_F^c$, $\forall i = 1, \ldots, n$ e que $\nabla F_i = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial q}, \dfrac{\partial F_i}{\partial p}\right) \neq 0$ (por hipótese do teorema). Sem perda de generalidade, suponhamos $\dfrac{\partial F_i}{\partial q} \neq 0$, então, pelo teorema da função implícita, podemos explicitar localmente $q = q(c,p)$, lembrando que o aparecimento de c nesta expressão se deve ao fato estarmos trabalhando em S_F^c. Considere a função

$$G(F,p) := \int_{m_0}^{m} \alpha = \int_{q_0}^{q} \sum_{i=1}^{n} q_i(c,p)dp_i$$

onde o traço do caminho de integração está em S_F^c e vai do ponto de coordenadas $m_0 := (q(c,p_0), p_0)$ até o ponto $m := (q(c,p),p)$, onde q_0 é um valor de referência qualquer. Suponha que G esteja bem definida, i.e., não dependa do caminho de integração. Então $\sum_{i=1}^{n} q_i(c,p)dp_i$ é uma forma exata, portanto temos $q_i = \dfrac{\partial G}{\partial p_i}$. Definindo Ψ_i por

$$\Psi_i := \frac{\partial G}{\partial F_i}$$

teremos

$$dG = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i dF_i + q_i dp_i$$

Lembrando a propriedade de formas diferenciais que $d(d\omega) = 0$ para qualquer forma ω, temos:

$$\begin{aligned}
0 = d(dG) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \Psi_i dF_i + q_i dp_i\right) \\
\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} d\Psi_i \wedge dF_i + \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i = -\sum_{i=1}^{n} dF_i \wedge d\Psi_i + \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} dF_i \wedge d\Psi_i = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i
\end{aligned}$$

donde $\Omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i = \sum_{i=1}^{n} dF_i \wedge d\Psi_i$, ou seja, a forma canônica simplética é preservada nas novas coordenadas (F_i, Ψ_i). Isto mostra, via corolário (3.5.), que se G estiver bem definida, então h é canônica.

Para mostrar a existência de G, invocamos o *Lema de Poincaré*, onde diz que toda forma diferencial ω fechada (i.e., $d\omega = 0$) é localmente exata (i.e., existe φ tal que $\omega = d\varphi$). No caso, temos que mostrar que α é uma forma fechada em S_F^c, isto é, $d\alpha\big|_{S_F^c} = 0$. Para tanto, note que $d\alpha\big|_{S_F^c} = \Omega\big|_{S_F^c}$. Da proposição (2.4.), a hipótese de involução das integrais primeiras F_i implica em $\{X_{F_i}\}_{i=1}^{n}$ ser uma base para o espaço tangente de S_F^c. Então dados quaisquer dois vetores u, v do espaço tangente de S_F^c, podemos escrevê-los como combinações lineares de elementos da base do espaço tangente, ou seja, $u = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{F_i}$ e $v = \sum_{i=1}^{n} b_i X_{F_i}$ e levando em conta a bilinearidade da forma canônica simplética Ω, temos que $\Omega(u, v) = 0 \Leftrightarrow \Omega(X_{F_i}, X_{F_j}) = 0$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$. Mas $\Omega(X_{F_i}, X_{F_j}) = \langle X_{F_i}, JX_{F_j}\rangle = \langle J\nabla F_i, J^2\nabla F_j\rangle = \langle J\nabla F_i, -F_j\rangle = -\langle F_j, J\nabla F_i\rangle = -\{F_j, F_i\} = 0$, portanto $\Omega\big|_{S_F^c} = 0$, daí $d\alpha\big|_{S_f^c} = 0$, portanto α é localmente exata em S_F^c. Resumindo, mostramos como construir uma transformação canônica h, que leva (q_i, p_i) em novas coordenadas (F_i, Ψ_i), onde as F_i são as n integrais primeiras em involução, e permite resolver trivialmente o sistema nas novas coordenadas, dando como solução $F_j(t) = F_j(0)$ e $\Psi_j(t) = \Psi_j(o) + t\beta_j$. Dessa forma, a solução do sistema original envolve os seguintes passos:

1. Explicitar $q = q(c, p)$ localmente (operação de tomar inversa).
2. Construir $G(F, p) := \int_{m_0}^{m} \alpha = \int_{q_0}^{q} \sum_{i=1}^{n} q_i(c, p) dp_i$ (operação de integração).
3. Obter as coordenadas $\Psi_j := \dfrac{\partial G}{\partial F_j}$ (operação de diferenciação).
4. Escrever a solução $F_j(t) = F_j(0)$ e $\Psi_j(t) = \Psi_j(o) + t\beta_j$ nas novas coordenas (operação de manipulação algébrica elementar).
5. Obter a solução do sistema original via $(q(t), p(t)) = h^{-1}\left(F(q(t), p(t)), \Psi(q(t), p(t))\right)$ (operação de tomar inversa).

Com isso, foi mostrada a solubilidade do sistema completamente integrável via quadraturas. □

4 APLICAÇÕES

Para ilustrar um exemplo de aplicação do teorema de Liouville, considere a função hamiltoniana $H : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ do modelo conhecido na literatura como *Molécula de Toda*:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + e^{q_1 - q_2} + e^{q_2 - q_3} + e^{q_3 - q_1}$$

cujo sistema hamiltoniano é dado por:

$$\begin{cases} q'(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p} = (p_1, p_2, p_3) \\ p'(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -\left(e^{q_1 - q_2}, e^{q_2 - q_3}, e^{q_3 - q_1}\right) \ . \end{cases}$$

Pode ser verificado, via colchete de Poisson $\{H, F_i\} = 0$, que são integrais primeiras:

$$\begin{aligned} F_1(q,p) =& p_1 + p_2 + p_3 \\ F_2(q,p) =& \frac{1}{9}(p_1 + p_2 - 2p_3)(p_2 + p_3 - 2p_1)(p_3 + p_1 - 2p_2) - \\ & -(p_1 + p_2 - 2p_3)e^{q_1 - q_2} - (p_2 + p_3 - 2p_1)e^{q_2 - q_3} - \\ & -(p_3 + p_1 - 2p_2)e^{q_3 - q_1} \end{aligned}$$

Além disso, pode ser verificado que estão em involução, ou seja, $\{F_1, F_2\} = 0$. Portanto atende às condições do teorema de Liouville, daí o sistema pode ser completamente resolvido por quadraturas.

Referências

[1] Olivier Babelon, Denis Bernard e Michel Talon. *Introduction to Classical Integrable Systems.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[2] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations: Basic Theory*. Springer-Verlag, New York, NY, 1996.

[3] Edmund Taylor Whittaker. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1988.

[4] David Betounes. *Differential Equations: Theory and Applications.* Springer-Verlag, New York, NY, 2001.

[5] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics Volume 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.